

Q. D. B. V.

RECTORE MAGNIFICENTISSIMO,
SERENISSIMO PRINCIPE, AC DOMINO,
DN. FRIDERICO AVGVSTO,
PRINCIPE REGIO, ET ELECTORATVS SAX. HEREDE.
ETC. ETC. ETC.

DE

ALGEBRA,
PRO LOCO,

ab

Ampliff. Facult. Philosoph.

benevole concessio

DISSERET

M. JOH. GEORG. CHRISTOPH.

Feuerlein/

RESPONDENTE

GEORG. SAM. RAMMELMÜLLERO,

IX. KAL. FEBR. 1703.

Horis consuetis,

IN AUDITORIO MAIORI.

VITEMBERGAE, PRAELO GERDESIANO.

RECTOR MAGNIFICENTISSIMO
HONORABILISSIMO
DEI PATRIARCHA CO ADRIANO
PONTIFICI MAXIMO
ETC. ETC. ETC.

ALBERTO
DEI PATRIARCHA CO ADRIANO

ALBERTO
DEI PATRIARCHA CO ADRIANO

ALBERTO
DEI PATRIARCHA CO ADRIANO

ALBERTO
DEI PATRIARCHA CO ADRIANO



M!



Gnosces, Hippocrates ingenio-
fissime, temeritati dicentis, vi-
tam arti esse satis accommo-
dam, nec alteram alteri am-
plitudine, seu longitudine cede-
re. Nullum enim inter nos est
diffidium. Nec me audacia eo
abduxit, ut tibi contradicendi
animo talia opponerem, ut qui optime perspectum
habeam, te, asserentem, vitam esse brevem, artem
A vero

vero longam, de vita naturali, nullo modo autem de morali locutum fuisse. Illius brevitās, aut diuturnitas, tractu, et fluxu temporis terminatur, ac definitur. Haec vero nullis temporum angustiis, sed actionum honestate circumscribitur; quae actiones si ab hac deviae vitiis immergantur, non vixisse homo diu, sed errasse est dicendus. Confirmat id Seneca c. i, l. de brevitāte vitae. Non exiguum habemus, inquit, temporis, sed multum perdimus. Satis longa vita, et in maximarum rerum consummationem large data est, si bene collocaretur. Sed, ubi per luxum ac negligentiam defluit, ubi nulli bonae rei impenditur, ultima demum necessitate cogente, quam ire non intelleximus, transisse sentimus. Ita est, non accepimus brevem vitam, sed fecimus, nec inopes eius, sed prodigi sumus. Sicut amplae et regiae opes, ubi ad malum dominum pervenerunt, momento dissipantur; at, quamvis modicae, si bono custodi traditae sunt, usu crescunt: ita aetas nostra bene disponenti multum patet. Quid de rerum natura querimus? illa se benigne gessit. Vita si scias uti, longa est. --- adeo, ut, quod apud maximum poetarum more oraculi dictum est, verum esse non dubitem:

Exigua pars est vitae quam nos vivimus. Quae cum ita sint, nescio an culpari, redarguique ullo modo possit, is, qui statuit vitam nec brevem, nec artem tam longam, quin superari queat, maximo opere cum aequus rerum arbiter miram inter vitam, et artem harmoniam intercedere facile deprehendat, ita ut alterum alteri quam exactissime respondeat,

spondeat, modo media debita adhibeantur. Neque enim amplitudo, aut multitudo rerum cognoscendarum ingenii humani vires, et capacitatem excedit, et transgreditur, sed iisdem par est, et aequalis. Quippe de iis solis iam sermo instituitur, quae ratiocinando consequimur, aut adprehendimus. Quae enim alterius cognitionis obiecta, quaeve alio modo quam ratiocinatione noscuntur, non veniunt in hanc tractationem. An vero illa media sint praedicamenta Pythagorae, an Logica Aristotelis, Ars Magna Raymundi Lullii, Syntaxis artis mirabilis Gregorii Tholosani, Typus omnium scientiarum Aegidii Moncurtii, Ars Cyclognomica Cornelii Gemmae, Methodus Mirifica Petri Sanchetz, Digestum Sapientiae Ivonis Parisini, Ars Combinatoria Kircheri, Pharos Scientiarum Sebastiani Izquierdi, Instauratio nova, et Organon novum Francisci de Verulamio, Regina Scientiarum Morestelli, Ars universalis Knittelii, et quae sunt alia aliorum scripta, aliis diiudicandum relinquo: tum, quod haec ad praesens institutum parum faciant; tum, quod otium fecisse videatur Fautor honorandus, Dn. Darschitzky, in elegantissima Dissertatione de Arte Inveniendi. Illud interim moneri haud praeter rem fuerit, nos multis difficultatibus obvenire, multos circuitus, multos errorum circulos vitare posse, si studium novaturiendi, et novas sectas condendi; si pravas aemulationes ad Garamantas ablegare; si invidiae et difficultati, si quae cognita habeamus, cum aliis candide communicandi renunciare vellemus; nec docentes discipulis offutias offunderent, et ex eo-

rum inscitia sibi gradum ad gloriam, ac nominis celebritatem struere in votis haberent; si denique eruditi inter se magis conspirarent, et sua symbola in commune conferrent. Quae dum non observamus, quid mirum est, viam artis confundi, atque in errores meros, et an fractus converti, protrahi in longius, et nimium elongari; viam e contrario ad Sapientiae stadium emetiendum nimis fieri brevem. Hoc aetas patrum vidit, hoc nostra agnoscit. Nec defuerunt, qui vitia illa emendare laborarent, multumque adiumenti ad studia promovenda adferrent, per Societates, Collegia, et praeclaro illo instituto proponendi in medium varia problemata, et quaestiones difficiliore, a Galilaeo Galilaei incepto, a Merfeno, et aliis egregie promoti, a Vallisio, Newtonio, Vrenio, Leibnützio, Bernoulliis, Tschirnhausio, Sturmio, aliisque laudabiliter continuato. Incredibile dictu, quantum per hoc nunquam satis laudandum inventum studia in universum omnia, imprimis Mathematica, et in illis Analyseos promota fuerint. Quae Analysis cum omnium ore celebretur, non inconsultum iudicavi, si artificium hoc stupendum tanquam in nuce exhiberetur, ut viderent omnes incrementa Algebrae, et quid nobis polliceri possemus, si alii pariter in aliis disciplinis elaborandis se ita gererent, quemadmodum laudati scriptores se gesserint praecipue in Mathematicis, et Algebra promovenda.

Algebra, etsi nunc maxime floret, non tamen nudius tertius est excogitata, sed, ut recte observavit

vavit Carolus Renaldinus in vasto illo opere, quod Ars Analytica Mathematicum inscribitur, et Barrovius in peculiari dissertatione de Archimedis methodo investigandi, iam olim fuit recepta. Ante hunc dicebat idem hoc Oughthredus in praefatione, quod et monet Schootenius, VVeigelius, Tschirnhausen, Sturmius, et inprimis VVallisius, qui integram historiam Algebrae edidit. Ex quibus constat, veteribus, ut Platoni, et aliis, omnino fuisse perspectam, inter mortuam vero veluti in vivum revocatam postliminio Seculo XV vergente, primum a Luca Paciolo, five de Burgo Minorita, qui lingua Italica tractatum de Algebra Venet. 1499. divulgavit. Quem dein secuti alii, in arte, quam vocant, maiore elaboranda maxime solliciti. Vbi interim Arabum subsidiis, donec tandem Xylander primus Diophantum Latine publicavit. Mediocria tamen per integrum seculum fuere haec studia, nec ad excellentiam ante aspirare coeperunt, quam anno circiter 1590, quo Franciscus Vieta Arithmetica, quam dicit Speciosam introduxit, receptis pridem operationibus Algebraicis commodiorem inducens notationem. Quem excepit tum Harriotus, tum Oughthredus, quorum dein presit Vestigia Cartesius, a cuius temporibus caput altius, sublimiusque efferre coepit scientia nobilissima. Quae si nova dici debeat, non alio respectu, quam maioris cultus, et perfectionis, nova adpellari potest.

Caeterum qui primi eius sint inventores, obscurum ad nodum. A Mauris ad Anglos, et Italos venisse, indubium est, perinde atque certum, Mauros

ab Arabibus eam accepisse, et Arabes ab Indis. Europaeos Arabibus eam debere, vel nomen loquitur, quod Wallisio auctore ab al-giabr descendit. Arabibus enim al-giabr *W*^{al}-mukabula dicitur. Verbum giabara autem idem significat, ac restaurare; Kabala tantundem est, quantum ars restitutionis, et comparisonis vel Ars resolutionis, et aequationis. Vnde etiam L. de Burgo restitutionis, et oppositionis regulam interpretatur. Italis dicitur regula rei, sive de la Cossa, melius costa; Germanis *die Regel coff*: ideo forsan, quia iuxta Algebram antiquam operationis initium fieri solet ab hoc characterē, *v*, qui rem, radicem, Italis coffam, adhuc involutam, denotat. Keckermannus in *Syftemate Math.* p. 46. denominationem Regulae Coff, non a voce Italica, coffa scilicet, sed ab Arabico *ḥip* numerare venire putat. Cum quo consentit Peucerus in *Logistica Astronomica*. Ergo illi Regula Coff excellentissima est ars numerandi. Vid. et Schottus in *Curſu Mathematico* p. 527.

Describitur a Renaldino, quod sit scientia, quae ex datis quibusdam, ac notis quantitatibus, aequalitatis beneficio, ignotam quantitatem non casu, sed consulto adinveniens, explicans, atque demonstrans, problemata non soluta solvit, male soluta reiicit, atque theorematum veritatem inquirat.

Nobis est scientia circa quantitatem, quae, supposito iam invento, et facto, quod quaeritur, ita nota ignotis miscentur, et totum, mediantibus divisione, et aequalitate, in suas resolvitur partes, ut tandem

dem ignota quantitas alicui notae quantitati aequalis ostendatur. Atque ita ignotum invenit, theoremata subtilissima explicat, ac problemata difficillima solvit, et demonstrat.

Dispersi alioquin solet in Numerosam et Speciosam. Illa circa numeros absolutos, haec circa species, cuiusvis quantitates loco assumtas, est occupata. Auditque rursus a cultoribus, vel Vietea, vel Cartesiana. Vietea, quia eam Vieta restauravit, et insigniter auxit. Assumit hic loco datorum, sive notorum, consonantes, et loco ignotorum vocales. Contra ea Cartesius, Harrioti legens Vestigia, loco datorum priores alphabeti literas, et loco ignotorum posteriores. Vieta retinet literas maiores, Cartesius minores. Ille utitur signis antiquis potestatum, hic potestates numeris exprimit.

Huius illustris viri vestigia cum plurimi sequi soleant, etiam nobis visum est in hoc genere nostras periclitari vires, et specimen dare, aut synopsin, quae manuductionis loco esse possit incipientibus ad pleniorē nobilissimae scientiae cognitionem. Vnde tota tractatio tribus constabit partibus, quarum prima exhibebit algorithmum tradentem quantitates rationales, surdas, integras et fractas; altera exponet aequationem speciosam; tertia denique docebit analysin rebus ipsis adplicare. Habebunt hic incipientes viam regiam, a Ptolomaeo dudum desideratam, non tamen obtentam; habebunt, quae suis studiis Mathematicis, et amplitudini artis possint consulere, ne, si multa didicerint, quae tamen non ad rem faciant, pro iis sibi cum Themistocle artem obliviscendi optare habeant necessum.

PARS

PARS PRIMA.

Continet principia, maxime definitiones, subiectum demonstrationis, signa Algebraica, et denique affectiones, computationem in primis, totumque proinde algorithmum.

Definit. I.

Symbola speciosa sunt alphabeti literae, ad quamcunque quantitatis speciem denotandam assumtae.

Scholium.

Dicuntur a nonnullis species, unde et nomen Arithmeticae Speciosae factum puto ab ea significatione vocis species, quae apud Iuris peritos occurrit. Vt enim Icti casus civiles exponere solent nominibus Titii, Sempronii, Caii, Maevii etc. quas species adpellant, quibus intelliguntur indefinite quique homines sic affecti; vel ut Iuris-Consulti Anglicani literis IQ, IR, ID, aut brevius, A, B, C; Sic Algebraistae per alphabeti literas designant nunc magnitudinem, nunc tempus, nunc sonum, nunc pondus, immo omnem, ceu in definitione dictum, quantitatis speciem.

Assumta itaque talis litera, ad aliquam quantitatem designandam, vocatur dignitas, sive potestas; quae nihil est aliud, quam analyseos suscipiendae indicatio, graduum distinctione limitata, qui licet infiniti, hac tamen progressionem, ut naturali ordine, se comitantur, et notantur. Sic ad indicandum numerum 80, vel 70, utimur litera a. Litera a vocatur digni-

dignitas prima. Quae si in se ipsam ducitur, producit dignitatem secundam, nimirum aa , vel a^2 . Atque iam vocatur quadratum. Si vero bis in se ducitur, dicitur dignitas tertia, sive potentia cubica, ut a^3 vel aaa , et sic in reliquis. Tot enim dignitates novae sunt possibiles, quot multiplicationes dignitatum possibiles.

Alias species discescuntur de quibus hactenus sumus locuti, in simplices, et compositas. Simples dicuntur, quae nullum signum algebraicum habent adscriptum; compositae vero, quae signo aliquo algebraico sunt copulatae. Suntque porro vel surdae vel rationales. Rationales dicuntur eae quarum valor adhuc per numeros potest exprimi; surdae autem vel irrationales, quarum valor effari nequit.

Definit. II.

Proportio est rationum similitudo.

Scholium.

Quemadmodum ipsae quantitates, sic earundem quoque rationes inter se comparantur. Quae rationum comparatio vocatur proportio. Ad minimum autem in tribus consistit terminis. Cum enim proportio rationum sit similitudo, ratio vero quaelibet duos requirat terminos, antecedentem et consequentem: necesse est proportionem in pluribus consistere terminis.

Tria vero proportionalitatis genera apud mathematicos reperiuntur nobiliora. Primum est proportio arithmetica, cum tria aut plura quanta eadem

differentia se consequuntur, idque vel continue terminis ascendendo crescentibus, $a, a+x, a+2x$, aut contra descendendo imminutis, ut $a, a-x, a-2x$; Vel discretim pariter aut crescendo, aut decrescendo, ut $a, a+x, b, b+x$ vel $a, a-x, b, b-x$. Secundum genus est proportio geometrica, cum duo aut plura quanta eadem continentia se consequuntur, h. e. ita ut primum eadem amplitudine secundum contineat, aut a secundo contineatur, quo secundum a tertio, vel tertium a quarto; idque rursus vel continue crescendo, vel decrescendo, ut $a, ea, e2a, e3a$: vel discretim pariter crescendo vel decrescendo, ut a, ea, b, eb, c, ec . Tertium est proportio harmonica. De qua ut et de nonnullis aliis quae hic monenda forsitan inferius pluribus.

Definit. III.

Signa sunt characteres certam specierum affectionem, vel numerorum etiam exprimentes.

Scholium.

Haec sunt varii generis, et optandum ut hic non unicuique fingendi concessa esset libertas. Potiora hic in Synopsi exhibentur.

$=$ Sunt Signa Aequalitatis.

$+$ Signum Affirmativum, aliis Additionis, et significat plus.

$-$, $\div$ Signum Negativum, aliis Subtractionis. Fardellae et Signum $+$ et $-$ sunt Signa Additionis.

$-:$ est

—:	est Signum Differentiae.
::	Signum Analogiae.
X	Multiplicationis.
$\frac{a}{b}$	Divisionis.
∴	Continuae Proportionis.
Δ	Signum Maioritatis.
∇	Minoritatis.
*	Numeri nudi, vel m. defectus.
⊗	Nota Involutionis.
ω	Evolutionis.
√, R, l. √q. √c. √u. √b.	Radices quadratae, cubicae, universalis, binomii.

Definit. IV.

Algorithmus est Tractatio specierum, earum notationem, additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem, radices extractionem continens.

Scholium.

Algorismus communiter denotat usum vel Tractationem figurarum numeralium, five praxin arithmetica per figuras numerales, quae Saracenicae adpellari solent. In harum locum dum in Algebra speciosa substituuntur species, harum computatio non male ad imitationem illarum, Algorithmus dicitur.

Definit. V.

Notatio est compendiosum scribendi genus, alphabeti literis plures quantitates uno obtutu sistens, ut eae eo felicius percipi et comparari mutuo queant.

Scholium.

Haec aliquo modo declarabit sequens tabella.

Nomina.	Characteres.	Species.	Potestas	Exponens.
Radix.	v.	a	0	1
quadratum.	q.	a^2	1	2
cubus.	c.	a^3	2	3
quadrato quadratum.	qq.	a^4	3	4
quadrato cubus.	qc.	a^5	4	5
cubo cubus.	cc.	a^6	5	6
quadr. quadr. cubus.	qqc.	a^7	6	7
cubo cubi quadratum.	ccq.	a^8	7	8
Tri cubus.	ccc.	a^9	8	9

Vbi ante omnia notandum, quod terminus primus 1, five unitas, nullam in se continet radices dimensionem; radix unam, quadratum duas, cubus tres, biquadratum quatuor, et sic porro.

His accommodari solent exponentes in progressionem arithmetica ab 0 inchoati, qui indicent, quot in quaque potestate sint radices dimensiones, five ad quem

quem gradum illa eleuetur, aut qvoto fit ab 1. loco. Quantitas enim nonnunquam deprimitur, e. g. quando tertia resolvitur in secundam. Nonnunquam elevatur, si secunda in tertiam assurgit.

Definit. Vlt.

Additio est nihil aliud quam inventio totius, in quo data exacte citra excessum vel defectum inveniuntur. Subtractio econtra ostendit inveniendam differentiam. Multiplicatio autem recte dicitur additio composita. Sicut enim in additione simplici qvilibet sui pars semel tantum accipitur, sic in multiplicatione pluries. Ast quemadmodum multiplicatio est multiplex additio, sic divisio est multiplex subtractio, qvippe dividere est nihil aliud, quam idem numero quantum pluries ab altero demere. Radicem extrahere idem sonat, ac ita unam quantitatem per aliam dividere ut qvotiens semel aut pluries in se ductus, aeqvetur dividendo.

ADDITIO.

Regula Prima.

Si species eadem, et signa ante species pariter eadem, adduntur praefixo eodem signo; qvod perspicuum ex additionis definitione. Sic

$$8a \quad a + c - b$$

$$a \quad a + 4c - 2b$$

$$9a \quad aa + 5c - 3b$$

B 3

Regu-

Regula Secunda.

Si ante species easdem diversa reperiantur signa, subtrahatur minor a maiore, et producto vel residuo addatur maioris speciei signum. Ratio est, quia positivum et negativum se invicem destruunt. Quaelibet enim ex unitatibus negativis alteram unitatem positivam destruit, quae eiusdem rationis. Si itaque eadem species, quae diversa signa habent sunt aequales, summa necessario erit O. e.g.

$$\begin{array}{r}
 2b \quad ab - 3a + 5c \quad 6a + c \\
 -b \quad 3ab + 4a - 7c \quad -6a - c \\
 \hline
 b \quad 4ab + a - 2c \quad O
 \end{array}$$

Regula Tertia.

Propositis pluribus diversis tamen quantitatibus, iisdem five oppositis signis affectis, simul indirectum cum suis signis collocentur, et absoluta est operatio. Patet rursus ex definitione additionis veritas huius regulae. Hinc

$$\begin{array}{r}
 -a + b + x \\
 -h - p + g - c
 \end{array}$$

$$\hline
 -a + b + x - h - p + g - c.$$

Hactenus a priori regulae fuere demonstratae; verum etiam a posteriori per subtractionem operationes praesentes probantur. Si enim numeri addendi subtrahantur figillatim a summa et O remaneat, summa quadrat. Nam cum totum aequetur singulis suis partibus simul sumtis, sequitur, quod si ab eo singu-

singulae partes collectivae tollantur, remaneat nihil. Sed summa inventa in additione est totum, numeri singuli collecti sunt eius partes; ergo, si a summa auferas partes simul collectas, nil remanet: quod erat demonstrandum, et per exemplum illustrandum.

$$\begin{array}{r}
 a + c - b \\
 4a + 4c - b \\
 \hline
 5a + 5c - 2b \\
 4a + 4c - b \\
 \hline
 a + c - b \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

SVBTRACTIO.

Regula Prima.

Si species eadem, et aequales; et quae eadem habent signa, a se invicem subtrahendae, residuum est nihil. Si autem subtrahenda minor superiori, ex quo subtractio debet fieri, subtractio peragitur vulgari modo. Omnia per definitionem subtractionis.

$$\begin{array}{r}
 4ac + x \\
 4ac + x \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 7a + 3c - 3d \\
 a + c - d \\
 \hline
 6a + 2c - 2d
 \end{array}$$

Regula

Regula Secunda.

Si species, quae eadem habent signa, ita sunt comparatae, ut subtrahenda maior superiori, inverse est subtrahendum, et Residuo apponendum signum contrarium. Nam si v.g. duobus signis positivis quantitates sunt affectae, et a minore concipitur tantam partem subtrahendae maioris esse subtractam, quanta subtrahi potest; perspicuum erit, reliquum non aliter, nisi per signum privativum subtrahi posse. E contrario, si quantitates duobus signis negativis sunt praeditae, signum additionis $+$ est praefigendum: quippe privativi subtractio vera est positio. Haec variatio signorum etiam observanda, si quantitates a se invicem subtrahendae, quae diversis literis denotatae. Ibi enim tantum subtrahendae connectuntur, cum iis, a quibus subtractio debuisset fieri, variatis signis. Vnde

$$a - b + 4bb$$

$$xx + 6b$$

$$3a - 2b + 7bb$$

$$a + 4c$$

$$-2a + b - 3bb$$

$$xx + 6b - a - 4c.$$

Regula Tertia.

Si species eadem diversa gerunt signa, ex subtractione fit Additio, et apponitur summae signum quantitatis, a qua subductio fieri debet, licet subtrahenda maior sit minuenda. Ratio est obvia. Si enim quantitas negativa a positiva subtrahenda, productum subtractionis maius est utroque genitore. Sic

si a 12 positivis velis auferre 7 negativas, necesse est, ut 12 positivis, 7 negativas addas. Nam demere a positivo negationem, idem est, ac positivum addere positivo: quippe negatio non tollitur, nisi res ponatur. 12 a itaque minus 7 a erunt $\equiv + 19 a$. Hinc

$$\begin{array}{r} 4a - 2bc + 3f \\ - 3a + 5bc - 2f \\ \hline 7a - 7bc + 5f \end{array}$$

De reliquo, quemadmodum Additio comprobatur per subtractionem, sic subtractio examinatur per Additionem. Etenim cum partes simul acceptae adaequant totum, sequitur necessario, quod, si differentia, et numerus minor in subtractione simul addantur, adaequant numerum maiorem, cuius sunt partes. Sic

$$\begin{array}{r} 7a + 3c - 3d \\ a + c - d \\ \hline 6a + 2c - 2d \\ a + c - d \\ \hline 7a + 3c - 3d \end{array}$$

MULTIPLICATIO.

Regula Prima.

Species, ad multiplicandum propositae, aut sunt eadem, aut diversae. Huius quicquid sit, si non
C
habent

habent appositos numeros, immediate copulantur. Sin vero numeros habent appositos, reperiuntur hi vel ante, vel post species. Si ante inter se multiplicari debent, et factum literis sibi invicem copulatis praefigitur; Sin post, simpliciter adduntur. Quae partim ex definitione, partim natura nota, quippe partes simul sumtae, adaequant totum. Inde

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 acd \\
 bx \\
 \hline
 acdbx
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 13b \\
 6b \\
 \hline
 78bb
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 6xb^3 \\
 6xb^3 \\
 \hline
 36xb^6
 \end{array}
 \end{array}$$

Regula Secunda.

† in † aut - in -, dant †. Et haec regula sua radiat luce. Nam si Multiplicatio est Additio composita, ceu superius dictum, † in † ductum, non aliud potest proferre productum, quam positivum ampliatur, et auctum. Sin vero - in - hoc observandum. Iuxta Algebraistas - in ÷ ducere idem est, ac tollere, et negare. Non autem tollitur, multo minus negatio excluditur, nisi per positionem positivi. Ergo accipere - negativum, est ponere ipsum positivum.

Regula Tertia.

Diversa signa ponunt —. Si ad praecedentia respicimus, et haec regula suos habebit numeros. Multiplicetur e. g. -4 in † 4, productum erit - 16,
ex

ex natura Multiplicationis. Multiplicare enim quantitatem per aliam dicimus, quando invenimus quantitatem, in qua toties continetur multiplicandus, quot in multiplicatore fuere unitates. Si allatum exemplum perpendimus, reperimus quatuor unitates in multiplicatore. Invenienda vero est quantitas, quae continere debet toties multiplicandum, quot in multiplicatore sunt unitates. Necessario ergo quater in ibi esse debet, ergo - 16; Q. E. D. Aliter demonstrat Sturmius, qui videri potest in Math. Enucleatae Sect. 2. pr. IV. V. e. q. f.

$$\begin{array}{r}
 4a^3 + 3aa - 2a + 1 \\
 \quad \quad \quad aa - 5a + 6 \\
 \hline
 +24a^3 + 18aa - 12a + 6 \\
 -20a^4 - 15a^3 + 10aa - 5a \\
 4a^5 + 3a^4 - 2a^3 + aa \\
 \hline
 4a^5 - 17a^4 + 7a^3 + 29aa - 17a + 6
 \end{array}$$

Advertendum hic etiam est, quod non raro utile, si Multiplicatio hoc modo non instituatur, sed tantummodo innuatur inferendo voculam in, vel literam M.

Examen a posteriori est. Si productum dividitur per multiplicandum, emergit multiplicans; Sin per multiplicantem, prodit multiplicandus.

$$\begin{array}{r}
 12b \\
 6b \\
 \hline
 72bb
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1 \quad f \\
 72bb \\
 66b \quad | \quad 12b \\
 bb \quad | \quad \\
 \hline
 C 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1 \quad f \\
 72bb \\
 12b \quad | \quad 6b \\
 bb \quad | \quad \\
 \hline
 DIVI-
 \end{array}$$

DIVISIO.

Regula Prima.

Si species numeros habent praefixos, post specierum divisionem, et numeros dividere et numerorum quotum etiam specierum qvoto praefigere debemus. Sin vero numeros non habent praefixos, ex specie dividenda auferatur id, qvod divi-
fori est simile. Ast si numerus post speciem reperi-
tur, numeri ab invicem sunt subtrahendi. Per de-
finitionem Divisionis.

$$\begin{array}{r}
 a^3 - 3aab + 3abb - b^3 \quad f \quad aa - 2ab + bb \\
 a - b \\
 \hline
 a^3 - aab \\
 \text{Imndcb fnde} \quad - 2aab + 3abb - b^3 \\
 \text{mlb} \quad \left[\begin{array}{r} a - b \\ - 2aab + 2abb \\ + abb - b \\ a - b \\ + abb - b^3 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Regula Secunda.

Si contigit productum ex multiplicatione Quo-
ti in partem Divisoris non posse subtrahi, superius
scribitur, signo contrario praefixo. Per regulam
secundam subtractionis.

Regula Tertia.

Qvod de signis + et - dictum in capite de Mul-
tiplicatione, hic quoque observandum venit.

b³ +

$$b_3 \div c_3 \{ bb - bc + cc$$

$$b \div c \{$$

$$b_3 \div b bc$$

$$- bb c + c_3$$

$$b \div c$$

$$- bbc - bcc$$

$$+ bcc + c_3$$

$$b \div c$$

$$+ bcc + c_3$$

$$aa - bb \{ a - b$$

$$a \div b \{$$

$$aa \div ab$$

$$- ab - bb$$

$$a \div b$$

$$- ab - bb$$

Regula Qvarta.

Si Divisor dividendum non exhaurit, abiectis speciebus similibus, dissimiles in modum fractionis collocantur.

$$\begin{array}{r} 2ab + ac - xce \{ 2a + a - xe \\ bc \quad bc \quad bc \{ \frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{b} \quad \frac{\quad}{b} \end{array}$$

EXAMEN.

Si Divisor per Qvotum multiplicatur, prodit dividendus, ita tamen, ut, si residuum adsit, illud adiciatur. Vid. exempl. 2. Reg. III.

$$a \div b$$

$$a - b$$

$$- ab - bb$$

$$aa \div ab$$

$$aa \quad \frac{\quad}{\quad} \quad bb$$

C 3

DE

DE RADICIS EXTRACTIONE.

Regula Prima.

Si post species simplices reperitur binarius, indicium est, speciem illam esse quadratam: Si ternarius, cubicam: Si quaternarius, quadrato quadratam. Harum vero radices sunt illae ipsae species.

Regula Secunda.

Sin vero quantitates sunt compositae, et inter compositas una est quadrata, constare debet vel ex duobus quadratis, et duobus rectangulis; vel ex tribus quadratis, et sex rectangulis. Si facta laterum quadratorum adduntur, productum exhibet radicem. Si species composita cubica, constare debet ad minimum ex duobus cubis, et sex parallelepipedis. Quorum Cuborum addita latera rursus suppeditant radicem desideratam.

Scholium.

Perspicuum inde, quod iuxta ductum $aa + 2ab + bb$ omnis radix quadrata inveniri, et secundum praescriptum $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ omnis extractio radices cubicae peragi possit. Quae omnia latius deduxit Sturmius in Mathesi Enucleata p. 94. prop. 7, nec non Nothnagelius in Instit. Mathematicis p. 430. et 456. §. 317, et 324; imo iamdudum exhibuit Euclides prop. 4. II. Hinc dubio caret, quod specierum radices eodem modo quo in Arithmetica vulgari inveniuntur, inveniri queant, ceu ex seqq. exemplis videri potest?

$aa +$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 aa + 2ab + bb \\
 aa \quad 2a + b \\
 + 2ab + bb
 \end{array}
 \left[\begin{array}{l}
 a + b \\
 \\
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 p^3 - 3p^2b + 3pb^2 - b^3 \quad \{ p - b \\
 p^3 \quad 3p \\
 \quad 3p^2 \\
 \hline
 - 3p^2b + 3pb^2 - b^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Regula Tertia.

Si signum radicale datis Speciebus praefigitur, indicium est, quod Species non habeant radicem quadratam, aut cubicam.

Scholium.

Notandum hic, signum radicale vocari hoc $\sqrt{}$, atque in genere usurpari ad denotandam quamcunque radicem, five quadratam five cubicam five quadr. quadratam etc. Sed ad illam distinguendam ab aliis, communiter scribi $\sqrt{q}$, vel etiam simpliciter litera q . non apposita: et $\sqrt{c}$. ad insigniendam cubicam; et $\sqrt{Q.Q.}$ vel $\gamma\gamma$ ad declarandam radicem quadrato quadratam. Quae radices etiam sic designantur, $\gamma(2)$ $\gamma(3)$ $\gamma(4)$. Ab aliis hoc pacto γz , $\gamma z z$ etc. Observandum porro, quod compositis lineola apponitur, ut $\gamma 2bb$, $+ h l$, ut omnes intelligant, radicis notam se etiam ad ultimam speciem extendere.

Regula Quarta.

Radix imaginaria non aliter, nisi praefixo signo radicali, extrahitur, licet species exacte sit quadrata.

Sic

$$\begin{array}{r}
 -xx \\
 \gamma -xx
 \end{array}$$

Ratio

Ratio haec est. Idem enim est, si quis petat radicem alicuius negativae quantitatis, ac si peteret productum ex impossibili divisione. Etenim peteret numerum negativum aequalem numero positivo, qui numerus quod impossibilis patet ex terminis. Hoc enim casu numerus, cuius radix petitur, adeoque ad dividendum proponitur, est negativus: Eiusque divisor necessario est positivus, quia non habet praefixum signum. Igitur, iuxta Divisionis legem signorum, productus ex hac Divisione numerus, qui constituit petitam radicem, necessario est negativus; atque iuxta nos illius Divisionis, quae appellatur radicis extractio, productus hic negativus numerus debet aequari divisi, quem ostendimus necessario esse numerum positivum. Igitur petendo radicis extractionem ex numero negativo, petitur numerus negativus aequalis positivo.

CAPVT II.

De Specierum Fractarum Algorithmo.

§. I.

EVictum est, quod habet Fardella in usualis Mathematicae theoriae, l. II. c. 8. Numerus fractus inquit, est acceptio unius, vel plurium partium aequalium, in quas unitas divisa intelligitur. Idem dicere possum de Speciebus Fractis, quod scilicet sint partes aliquotae alicuius integrae quantitatis. Sic e.g. si dividas lineam in 6, 7, aut 8 partes aequales, numerus,

rus, qui exprimit unam, vel plures sectae lineae partes, dicitur fractus. Si linea denuo secetur in tot partes, quot antea fuit divisa, dicitur numerus, qui illas exhibet, fractio fractionis, sive minutia minutiae.

§. II. Si itaque demonstratum, aliquam lineam in infinitum dividi posse, et hoc perspicuum erit, dari minutiam minutiae minutiae minutiae in infinitum.

§. III. Caeterum notum est, quod omnis fractio constet ex numeratore, et denominatore. Numerator indicat, quot accipiantur partes ex denominatis, in quas unitas est divisa. Ast Denominator est is, per quem innotescit natura partium, in quas unitas distributa.

§. IV. Si in hoc de fractis algorithmo feliciter velimus progredi, praeparamentis erit opus. Horum instar vero pauca sequentia erunt problemata.

PROBLEMA I.

Integras quantitates infractas resolvere.

Fit hoc unitate iis subscripta; ut $a b^3$ resolvitur in hanc $\frac{a}{b^3}$. Ast si species integra in fractionem

I
datae denominationis sit convertenda, datus denominator cum data specie debet multiplicari, et producto denominator datus subscribi. Sic si $b + x$ in formam fractionis veniret transponenda, cuius denominator datus sit a , multiplicato integro per a ,
D erit

erit $\frac{ab + ax}{a}$ fractio quaesita. Sic si integra Species

$\frac{d}{a}$ in forma fractionis desideretur, cuius denominator $f - c$ productum erit $\frac{fd - cd}{d}$. Sic $\frac{aa - a}{a}$ facit $\frac{aa - ad}{d}$.

Quae ex natura fractionum, et per 17, VII, Euclidis clara.

PROBLEMA II.

Fractiones ad Simpliciores reducere.

Observe hic, quod si in numeratore, et denominatore, communes occurrant literae, illae sint eiciendae. Quod reliquum est, omnia se hic habent, ut in Arithmetica vulgari. Si enim fractio per communem mensuram maximam dividatur, habebis fractionem minorem. Quod rursus patet ex 18. Euclidis VII.

PROBLEMA III.

Specierum datarum communem dividuam minimam invenire.

Vt etiam huius Problematis rationem habeamus, suadet antecedens. Exponam vero animi sensu verbis Bartholini, quae habet in introductione ad Cartesii Geometriam p. 23. Scilicet inquit citato loco. Ad inveniendam minimam quantitatem, quae dividi potest per duas datas ac et cd , constituan-
tur

tur aac et cd in formam Fractionis hoc pacto $\frac{aac}{cd}$;

reducatur Fractio haec ad eius primitivam, seu simpliciore $\frac{aa}{d}$. Quibus iuxta se positis, hoc modo

$\frac{aac}{cd} \times \frac{aa}{d}$ Si multiplicatio instituat per crucem,

proveniet eadem quantitas ex aac in d , atque ex cd in aa ; fiet enim utrobique $aa\ cd$ minima quantitas, quae sine reliquo dividi potest per aac et cd . Si vero datae quantitates ad simplices reduci non possunt, indicium est, quod sint primitivae, atque ita unam per alteram debemus multiplicare, ut proveniat quantitas, quae invenienda. Operatio similis est illi, quam exhibet Euclides prop. 36, VII. Elementorum.

PROBLEMA IV.

Tres, vel plures sectas quantitates ad eandem denominationem reducere.

Ducantur datarum fractionum Denominatores in se invicem, et prodibit communis Denominator, cuius numeratores inveniuntur, si singularum fractionum numeratores ducantur in factum, ex reliquarum Denominatoribus proveniens. per 17, VII. Euclidis.

$$\begin{array}{r}
 \frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} \quad \frac{d}{a} \\
 \hline
 ada \quad cab \quad dbd \\
 \hline
 bda \quad bda \quad bda
 \end{array}$$

ADDI-

ADDITIO. Reg. I.

Si propositae quantitates eundem habent Denominatorem, addendi tantum sunt numeratores, et subscribendus communis Denominator; Sin vero Denominatores diversi, reducendi prius veniunt per Problema IV, et operatio dein, ceu in praecedentibus, instituenda.

$$\begin{array}{r}
 \frac{kk}{d} \text{ ad } \frac{yy}{d} \\
 \hline
 \frac{kk+yy}{d}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \frac{x^3}{b} \text{ ad } \frac{2l^3}{b} \\
 \hline
 \frac{x^3+2l^3}{b}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \frac{3a}{4b} \text{ ad } \frac{5l}{6z} \\
 \hline
 \frac{18az+2clb}{24bz}
 \end{array}$$

Si velis ad minores, atque simpliciores terminos e. g. ultimum casum reducere, fiat per Problema II.

$$\begin{array}{r}
 9az+10lb \\
 \hline
 12bz
 \end{array}$$

SVBTRACTIO.

Si Denominatio specierum est eadem, subtrahendi sunt a se invicem numeratores, et residuo subscribi debet Denominator datus; sin illae diversimode denominatae, ad eandem Denominationem reducendae per Problema IV. ut

$$\begin{array}{r}
 \frac{3ax}{a+b} \\
 \hline
 \frac{d-ax}{a+b} \\
 \hline
 \frac{4ax-d}{a+b}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \frac{abc}{h} \\
 \hline
 \frac{abcl}{hl}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \frac{dfg}{1} \\
 \hline
 \frac{dfgh}{hl}
 \end{array}$$

MVLTIPlicatio.

Regula Prima.

Duc in se invicem numeratotes, et productum supeditabit numeratorem ; ac deinceps etiam in se invicem Denominatores, et habebis producti novi novam Denominationem, atqve ita totum qvaesitum productum.

$$\begin{array}{r} \text{X y} \\ \hline \text{b } \overset{\text{c}}{\underset{\text{d}}{\text{d}}} \\ \hline \text{a} \end{array} \quad \text{erit} \quad \begin{array}{r} \text{b d x y} \\ \hline \text{3 a c} \end{array}$$

Regula Secunda.

Nonnunquam instituitur Multiplicatio per crucem compendii ergo, si species per crucem oppositae communem admittant mensuram, sic

$$\begin{array}{r} \text{a}^3 - \text{abb} \\ \hline \text{cd} - \text{dd} \end{array} \quad \text{per c-d, fiet} \quad \begin{array}{r} \text{a}^3 - \text{abb} \\ \hline \text{d} \end{array}$$

DIVISIO.

Regula Prima.

Si fracta per integram quantitatem, quae tamen pars numeratoris aliquota, dividenda, numerator per integram est dividendus, et productum erit desideratae fractionis numerator, cui postmodum datae fractionis Denominator subscribendus. Vt

$$\text{D } 3$$

$$\text{xy} \div$$

$$\frac{xy + hy}{6b - n}$$

Div. per y,

$$\frac{x + h}{6b - n}$$

erit quotus.

Regula Secunda.

Si fractae quantitates eiusdem Denominatio-
nis, divide numeratorem unius per numeratorem
alterius, et in Qvoto omitte Denominationem. Sin
vero diversae Denominationes, reducantur, et dein
observandum, qvod in priori casu fieri solebat. Sic

$$\begin{array}{ccc} \frac{x + z}{3fg} & \text{per} & \frac{bc - a}{3fg} \\ \frac{4ab}{dd} & \text{per} & \frac{2ca}{ed} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{qvotus erit} \\ \frac{x + z}{bc - a} \\ \frac{2be}{cd} \end{array}$$

RADICIS EXTRACTIO.

Regula Prima.

Extrahe primo Radicem ex numeratore, et
deinceps etiam ex Denominatore, postmodum con-
iunge extractas radices, et operatio rite erit peracta.
Sic

$$\begin{array}{ccc} \text{ex } \frac{xxyy}{zz} & \text{radix est } \frac{xy}{z} & \text{ex } \frac{a^3}{b^3} \quad \frac{a}{b} \text{ est } \sqrt[3]{} \end{array}$$

Regula Secunda.

Si quæsitæ Radix extrahi neqveat, praeponen-
dum signum radicale. Vt

Radix

$$\begin{array}{c} \text{Radix q. ex } \sqrt[2]{xb} \text{ est } \sqrt[2]{xb} \text{ Radix c. ex } \sqrt[3]{y} \\ \text{est } \sqrt[3]{y} \end{array}$$

Demonstratio huius de fractis Algorithmi pendet ex Demonstratione specierum integrarum. Evolvi interim potest Tacqvetus Arithmetices l. 3. It: Clavius in Algebra.

CAPVT III.

De Specierum Surdarum Algorithmo.

§. I.
OMnis quantitatis Divisio per aliam quantitatem dum perficitur, ita contingit, ut imperfecta, vel perfecta fit. Hæc evenit, cum fit adeo ut sine reliquo eveniat quotus. Prima autem, si cum reliquo provenit quotus. Atque adeo non dissimiliter est ratiocinandum in Extractione radice. Vnde cum ex aliqua quantitate radix est eruenda, aut ita radix elicitur, ut, iuxta conditionem, atque naturam Radicis, in se ducta totam quantitatem restituat; aut ita extrahitur, ut non præcise sua iam dicta multiplicatione quantitatem efficiat, quia nimirum nulla reperiri potest, quæ quantitatem illam, cuius radix quaeritur, ad unguem in se ducta, iuxta quaesitæ radice naturam, efficiat. Inde surdæ quantitates eveniunt.

§. II. Erunt itaque, ceu recte monuit Sturmius in Math. Enucleata, p. m. 74. quantitates surdæ, quæ

quae nullis totis numericis unquam perfecte determinari possunt, licet regulae sint in promptu, quarum subsidio eas accurate magis magisque in infinitum determinare liceat.

§. III. Quo signo utuntur Mathematici, si illas significare velint, superius iam in capite de Radicis Extractione dictum est. Hic tamen adhuc venit praemonendum, quod, si species diversorum graduum iungendae, aut rationale cum irrationali affirmationis signo, resultans species dicatur binomium, ut: $bb + \gamma xd$; Sin vero e binis nominibus negationis signo iunctis, species constat, residuum, five apotome dicitur, ut $xx - \gamma 6 yz$. Illud oritur ex imperfecta Additione, hoc ex imperfecta subtractione.

§. IV. Quod superest, si in ipso Algorithmo felices nobis velimus promittere progressus, nonnulla Problemata debemus praemittere, quibus nullo modo possumus superfedere; Sit itaque.

PROBLEMA I.

Species surdas Distinctas ad idem signum radicale revocare.

Si quanta seiuncta ita sunt comparata, ut alterum habeat signum praefixum, alterum eodem destituatur, multiplica quantitatem, quae signo caret quadrate, si affecta signum habet radice quadratae, vel cubice si affecta signo gaudet radice cubicae, et adscribe dein signum, quod radix, quae quantitati affe-

affectae praeposita, requirit. Vt ex $\gamma c \dagger d$ et $a \dagger b$ erit productum $\gamma c \dagger d \gamma a^2 \dagger 2ab \dagger b^2$. Sic $\gamma c. f \dagger b$ et $c \dagger d$ reductae ad idem signum radicale, dabunt $\gamma c. f \dagger b \gamma c. c^3 \dagger 3c^2d \dagger 3cd^2 \dagger d^3$.

Regula Secunda.

Si vero diversa signa radicalia habent, reductio peragitur, si ad numeros, a quibus radices denominantur, minimus inveniatur, qui per numeros radicum sine reliquo dividi potest. Sic $\sqrt[2]{(2)} xy$ et $\sqrt[3]{(3)} bbz$, exhibent $\sqrt[6]{(6)} x^3 y^3$ et $\sqrt[6]{(6)} b^4 zz$. Quae omnia ex natura potestatum cum suis exponentibus nota,

PROBLEMA II.

Species Surdas ad simpliciores reducere.

Regula Prima.

Divide quantitatem, sub eodem signo radicali comprehensam, per aliquod quadratum, vel cubum aliquem, per quod, vel per quem multiplicatione fuit producta. Si potestatis huius radix quotienti iungitur, constituit speciem simpliciore. Vt $\gamma 75 aa$ reduci potest ad $\gamma 3 a \gamma 3$. Sic $\gamma x^3 z \dagger x x z z$, exprimitur per $x \gamma x z \dagger z z$.

Regula Secunda.

Si inter divisores praeter unitatem quadratum nullum, aut cubus reperiat, designa quantitatem datam informam fractionis. Vt exemplum,

E
quod

quod est Batholini adhibeam sint e. g. 10aa. Hic denarius praeter unitatem quadratum nullum inter divisores admittit. Assumo igitur quadratum quodlibet, e. g. 4, 25. etc. et divido per illud speciem datum, et poterit postmodum sic designari, 2 a 75, vel

5 a 72 atque sic porro.

2

5

PROBLEMA III.

Invenire omnes Divisores quarumcunque datarum quantitatuum.

Regula Universalis.

Dividantur datae quantitates per quantitatem aliquam primitivam, et rursus quotiens per hanc eandem, sive aliam primitivam, idque tam diu, usque dum perveniamus ad aliquam primitivam, quae non nisi per se ipsam divisibilis. Hoc peracto omnes divisores erunt inventi, si praecedentes collegeris, et unumquemque eorum in quodlibet productorum antecedentium duxeris. Patet ex Def. I, V. Euclidis. Exempla quamplurima invenies apud Bartholinum in introduct. ad Geometriam Cartesii. Vid. et Franciscus a Schooten in Commentario ad Cartesii Geometriam, ubi modum, ex Stifelio desumptum exponit p. 300; Idem de Beaune de limitibus aequationis. Huc etiam pertinent, quae habet Wallisius in de Combinationibus, Alternationibus, et Partibus aliquotis tractatu, a p. 495 usque 511. Hunc locum pari-

pariter sibi vendicant Fermatii Problemata de Divisionibus, et Partibus aliquotis. Invitationem ad solutionem illorum invenimus in operibus eius posthumis huius tenoris: Proponatur (si placet) Wallisio, et reliquis Angliae Mathematicis sequens quaestio numerica. Invenire cubum, qui, additus omnibus suis partibus aliquotis, conficiat quadratum. E.g. numerus 343 est cubus a latere 7. Omnes illius partes aliquotae sunt 1, 7, 49, quae, adiunctae ipsi 343, conficiunt numerum 400, qui est quadratus a latere 20. Quæritur alius cubus eiusdem naturae. Quæritur etiam numerus quadratus, qui, additus suis partibus aliquotis, conficiat cubum. Has solutiones expectamus. Quas si Anglia, aut Gallia Belgica, et Celtica non dederit, dabit Gallia Narbonensis, easque in pignus nascentis amicitiae D. Digby offeret, et dicabit. His Wallisius non tantum satisfecit, ceu ex Fermatii epistolis videre est, sed addidit etiam tertiam quaestionem consimilis naturae. Nimirum, quomodo inveniendi duo numeri quadrati, qui, partibus suis aliquotis additi, eandem efficiant summam, e.g. $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 = 25 + 5 + 1$.

PROBLEMA IV.

Quantitatem mixtam ad formam merae surdae quantitatis reducere, ita, ut tota sub signo radicali contineatur.

Regula.

Quantitas, extra signum radicale constituta multiplicetur quadrate, si signum quadratum; vel cubice, si cubicum praefixum, ducaturque insuper in quantitatem signo affectam: et idem signo appposito efficiet, quod antea, ex parte signo radicali liberata. Sic $2b \sqrt{c}$ efficiet $\sqrt{4} b b c$.

PROBLEMA V.

Indagare, an datae quantitates sint commensurabiles, sive communicantes, nec ne.

Ante omnia hic evolvendum, quid quantitas communicans, et quid non communicans sit. Succurrit nobis Bartholinus c. l. p. 35. atque dicit, communicantem eam esse, quae affinitatem habeat cum quantitatibus rationalibus, aut etiam numeris, et est, ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, seu, sicut numerus ad numerum. Non communicans vero, cuius unius ad alteram relatio non est, ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, aut numeri ad numerum. His praemissis facillima erit ratio dignoscendi communicantes a non communicantibus.

Regula.

Divide species datas, ad idem signum radicale iam reductas, inter se, si quotiens provenit rationalis,

lis, species sunt Symmetrae; si irrationalis, erunt asymmetrae. Assumamus iam semel adductum exem-

plum denuo. Sic communicantes erunt $\gamma 75aa$

$\gamma 27aa$. Quia, Divisione per radicem 3, maximam earum communem divisorem, instituta, reducuntur

ad $\gamma 25aa$ et $\gamma 9aa$, hoc est $5a$ et $3a$, ut sint inter se, ut 5 ad 3. Sic communicantes erunt $\gamma b4 + bbcc$, et $\gamma bbcc + c4$, quia si dividuntur per $bb + cc$, oriuntur γbb et γcc , seu b et c . Atque ita reducuntur ad $b\gamma bb + cc$, et $c\gamma bb + cc$, quae sunt inter se ut b ad c . Wallisius peculiarem ex cogitavit modum, quem in Algebrae c. XXV. exponit, et qui in Praxi utilitate non caret. Scilicet furdas ad minimam, quae possibilis irrationalitatem reducit, eximendo ex liga quod est rationale. Quippe, ceu ipse loquitur, tunc statim patebit, num commensurabiles sint, nec ne, simulque, quae sit earum summa, aut differentia. Videri etiam potest Sturmius, c. l. in def. XXX, conf. 3. p. 78.

ADDITIO, et SVBTRACTIO.

Regula Prima.

Quantitates, quae addendae, vel subtrahendae, ante omnia, si diversa habent signa, ad idem signum radicale debent reduci. Dein videndum, an communicantes, an non. Si communicantes, quantitates extra signum radicale constitutae, adduntur, vel

E 3

subtra-

subtrahuntur modo consueto, et summae, vel residuo, species altera sub signo radicali annectitur. Sit datum exemplum iam antea

$$\begin{array}{r}
 \gamma \quad 75aa \\
 \hline
 \gamma \quad 27aa \\
 \text{h.e.} \quad 5a\gamma 3 \\
 \quad \quad 3a\gamma 3 \\
 \hline
 \quad \quad 8a\gamma 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5a\gamma 3 \\
 3a\gamma 3 \\
 \hline
 2a\gamma 3 \quad \text{differentia.}
 \end{array}$$

Regula Secunda.

Si non communicantes, addendae sunt interpositione signi affirmativi ; et subtrahendae, interpositione signi negativi. Vnde multinomia.

$$\begin{array}{r}
 \gamma 8xx \\
 \gamma 3xx \\
 \hline
 \gamma 8xx + \gamma 3xx
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \gamma 3z \\
 \hline
 \gamma ac \\
 \gamma xy \\
 \hline
 \gamma ac
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \gamma mn \\
 \hline
 \gamma hk \\
 \gamma lb \\
 \hline
 \gamma hk
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \gamma 3z + \gamma xy \\
 \hline
 \gamma ac
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \gamma mn - \gamma lb \\
 \hline
 \gamma hk
 \end{array}$$

Ratio ex 4, et 7, II. Euclidis, ut et exsuperius dictis liquet abunde.

MULTIPLICATIO.

Regula Prima.

Si species datae diversimode sunt affectae, primo reducendae sunt ad idem signum radicale ; et dein si communicantes, duci debent quantitates extra

tra signum radicale constitutae in se invicem, praetereaque productum in speciem, quae sub signo radicali continetur, et prodibit factum rationale.

$$\begin{array}{r} \gamma 75aa \\ \gamma 27aa \\ \text{h.e. } 5a\gamma 3 \\ \underline{3a\gamma 3} \\ 45aa \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \gamma 18bb \\ \gamma 2bb \\ \text{h.e. } 3b\gamma 2 \\ \underline{b\gamma 2} \\ 6bb \end{array}$$

Regula Secunda.

Si non communicantes multiplica inter se, et praeponere producto signum radicale. Vt

$$\begin{array}{r} \gamma x \dagger 3f \\ \gamma 4xd \\ \hline \gamma 4xxd \dagger 12fdx \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \gamma 6yZ \\ \gamma k - l \\ \hline \gamma 6kyZ - 6lyZ. \end{array}$$

Ratio fuit ex XXII, VI Euclidis. Sit e.g. $\gamma 5$ multiplicandus in $\gamma 3$. dico provenire $\gamma 15$. Nam ex multiplicationis definitione debet esse, 1. $\gamma 3 :: \gamma 5$. product. ergo per hanc, q 1. q $\gamma 3 ::$ q $\gamma 5$. q product. hoc est. 1.3 :: 5. q. product. ergo q. product. est 15. quare $\gamma 15$ est productus ex $\gamma 3$ in $\gamma 5$. Q. E. D.

DIVISIO.

Regula Prima.

Si datae quantitates sunt communicantes, divide

de quantitates, vel numeros, extra signum radicale constitutos. Quod oritur est quotiens quaesitus. Sic

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{75}aa \\
 \text{per } \sqrt{27}aa \\
 \hline
 5a\sqrt{3} \\
 3a\sqrt{3} \\
 \hline
 1\frac{2}{3}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \sqrt{49}xxZ \\
 \sqrt{9}xxZ \\
 \hline
 7x\sqrt{Z} \\
 3x\sqrt{Z} \\
 \hline
 2\frac{1}{3}
 \end{array}$$

Regula Secunda.

Sin quantitates non communicantes fuerint, dividendae erunt quantitates, sub signis radicalibus comprehensae, et producto praefigendum commune signum radicale.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{a^3b - ab^3} \\
 \text{per } \sqrt{aa - bb}
 \end{array}
 \quad \{ \sqrt{ab}$$

Repeti hic possunt, quae a nobis circa finem cap. de Multiplicatione sunt monita. Cum enim ex natura Divisionis certum sit, esse divisorem ad dividendum,

ut $\sqrt{1}$ ad quotum, si dividenda sit $\sqrt{15}$ per $\sqrt{5}$ erit $\sqrt{5}$

ad $\sqrt{15}$ ut $\sqrt{1}$ ad quotum, et per 22 VI 5 ad 15 ut $\sqrt{1}$ ad quadratum quoti, h. e. ad 3. Ratio regulae secundae ex def. 10. V. petenda. Hoc tamen adhuc observari potest, quod, si species, sub signo radicali contentae, dividi nequeant, in modum fractionis sint scribendae.

RADI-

RADICIS EXTRACTIO.

Regula Prima.

Si exponens est datus, secundum quem ex specie furda radix est extrahenda, erit productum exponentium numerus, a quo radix denominatur, qui, cum signo radicali datae speciei praefixus, monstrabit radicem. Vid. Dn. Beselin in diff. de tripl. Algebrae Cartesiana algorithmo. Sic ex

$\gamma bc \dagger d$ radix quadrata est $\gamma(4) bc \dagger d$.

Regula Secunda.

Subductis quadratis partium dati binomii a se invicem, si radix quadrata reliqui ad partem maiorem addatur, et ab eadem auferatur; erunt radices quadratae exsemisse summae et differentiae, per signum $\dagger$ vel $-$ binomii connexae, binae partes radices quaesitae. Vid. Barthol. c. l. p. 41.

Ex $aa \dagger bc \dagger 2a \gamma bc$
 $a^4 \dagger 2aabc \dagger bbcc$
 $4aabc$

$a^4 - 2aabc \dagger bbcc$
 $aa - bc$

Binom. datum.
 quad. partis maioris.
 quad. partis minoris.

reliquum.
 radix q. add. et subtr.

$2aa$ Summa
 $2bc$ differentia

aa Semiss. a radix
 bc Semiss. bc radix

Ergo dati binomii radix $a \dagger \gamma bc$.

F

Reg.

Regula Tertia.

Quod si, subductis a se invicem quadratis partium dati binomii, vel etiam residui, ubi idem faciendum, quod circa binomium occurrebat, reliqui radix quadrata et maior pars binomii communicantes non fuerint: Satius erit ipsi binomio signum universale radice quadratae praefigere. Bartholinus c. l.

Sic pro $\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa \pm bb}$ Scribo $\sqrt{\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{4}aa \pm bb}$.

Et hae vulgo nominantur radices universales. Quae omnia ex natura potestatum, earumque exponentium perspicua. Videatur interea Wallisius c. de surdis radicibus; Renaldinus eod. cap. nec non Schootenius in addidamento ad commentarium in Geometr. Cartesii p. 389. seqq.

§. V. Explicanda restaret doctrina de proportionibus, et progressionibus, uti etiam ab initio apud animum habebamus constitutum, quae doctrina in Mathesi nil utilius, nil pulchrius reperitur. Est enim maximum momentum in ea, quod ad Mathematica attinet invenienda, situm: quippe non tantum fundamenta regulae trium suppeditat, logarithmorum item nobilissimum Neperi inventum, infinitam terminorum proportionalium seriem in unam summam colligendi, atque ita praecipua fundamenta arithmeticae infinitorum, cuius notitiam in primis Wallisio, Bullialdo, et uberiorem culturam Cluvero debemus: Sed etiam Rationem docet surdas multiplicandi, et dividendi, fractiones reducendi, et quae sunt alia longe

longe plura. Verum mutavimus consilium ideo vel maxime, quia partim hoc caput peculiarem dissertationem desiderat, quam et propediem exhibebimus; partim quia a summis ingeniis, Sturmio in Math: Eucleata, Fardella in Math. Vsuale, Wallisio, qui primum nominandus, non tantum in tractatu Algebraico, verum etiam in eius Arithmetica Algebraica, summa diligentia est elaboratum. Idcirco benevolum lectorem eo interim amandamus, properantes ad partem secundam Algebrae Speciosae.

PARS II.

DE AEQVATIONE ALGEBRAICA.

§. I.

ELeganter vir summus, Carolus Renaldinus, in Algebra antiqva p. m. 87. de Graecis, et Latinis Sapientiae proceribus dicit; quod, quamvis in his literarum praeclariorum studiis contenderint, ut nihil unquam magis, omnemque curam in sacrationibus hisce mysteriis detegendis consumserint, ut aeqvum, ac iustum sit, eos, veluti de Mathematicis rebus optime meritos venerari; nihilominus, praestantiora quaedam aggressi, Aethiopis, ut aiunt, faciem lavarint: quamobrem plurimum occultae veritatis posteritati relinquentes, etsi amplitudinem suam exantlatis laboribus illustrarint, sibi que multum existimationis, laudis, honestatis, adsciscerint; non omnem gloriam occuparunt, aliquid propterea superesse, quamvis inviti, permiserunt, in quo posteritatis indu-

stria suos experiretur conatus. Si veritas asserti nulli elucesceret, sane ex hoc capite, quod pertractandum sumus, constaret. Licet enim multum veteres in aequationibus Algebraicis explicandis insudarint, rem tamen non ad summum perduxisse clarum est, et exsequentibus magis magisque patefcet.

§. II. Est autem, ut cum Vieta loquar, **ÆQVATIO**, magnitudinis in certae cum certa comparatio. Vel est, ut Renaldini verbis utar, aequalitatis proportio inter duas quantitates, vel res varie denominatas, sed notas ex una parte, ex altera ignotas.

§. III. Caeterum quia aequatio necessario debet esse inter varie denominata, cernimus, quod nonnulla aequationem antecedunt in problematum solutionibus, quæ antea considerata. Inter illa vero se primum offert **CONSIDERATIO STATUS QUÆSTIONIS**, an nimirum problema, five quaesitum, humana industria indagari queat, nec ne. Triplicem enim ob causam potest esse insolubile propositum aliquod problema. Primo, si circumstantiae eius ita sint comparatae, ut ex iis, quod quaeritur, per naturam sequi non possit. Exempli causa; efformetur triangulum rectangulum, cuius sit data basis, et data differentia, quæ hypotenusam Cathetus superet; hoc problema sic propositum impossibile est solutu. Notum enim omnibus, qui vel a limine Geometriam salutarunt, quod hypotenusam semper caeteris lateribus trianguli rectanguli sit maior, quia maximum subtendit angulum. Secundam causam suppeditat datorum vel paucitas, vel multitudo. Quippe si da-

ta non sufficientia, perspicuum erit, quod rursus solvi nequeat. Divinatio enim tantum D E O, aut iis, qui peculiariter ad eam exercendam instructi, competit. Talis esset, si quis e. g. a me peteret sensa animi Imperatoris Turcici. Vel si quis hanc quaestionem moveret. Dantur duo numeri ignoti x et z . Quorum summa $x + z =$ numero H . ignoto; differentia $x - z =$ numero g in ignoto; oporteat inveniri x et z . Haec quaestio sic proposita, quia nullum notum continet, est prorsus insolubilis. Sin vero omnia nota tunc inter quaestiones locum non invenit. Tertio denique non sufficit, quod nihil desit, requiritur et hoc ut nihil superflui superaddatur. Animus enim obruitur, atque confunditur. Idoneus itaque circumstantiarum selectus erit habendus.

§. IV. Percepto vero quaestionis statu progredior ad DENOMINATIONEM, sive nominum impositionem. Utuntur autem hic, ceu superius iam dictum, artifices literis alphabeti abc, xyz . Priores denotant cognita; posteriores incognita. Has literas assumunt, et rebus pertractandis per illas imponunt nomina. Sint e. g. inveniendi duo numeri, quorum summa sit 62, differentia 14. Voco summam datam a , differentiam b . Sunt enim mera cognita; ergo etiam iis literis insignienda, per quas artifices cognita indicare solent. Numerum vero minorem inveniendum quia incognitus, nomino x et maiorem $x + b$. Minorem enim summam iam pro cognita habeo; ergo per omnes datas conditiones erit eundem. Hisce peractis inquiri, an

comparatio inter nota, et ignota possit institui. Si potest institui, habeo, quod vocatur *ÆQVATIO*, ut in nostro exemplo inter summam datam, et numeros, qui inveniendi. Quare iuxta se invicem ponantur, interiecto signo æqualitatis, sequenti modo $xx + b = a$. Vbi notandum in antecessum, quod huiusmodi æquales quantitatum literalium complexus tot sint inveniendi, quot in quaestione occurrant incognita. Quod si vero non totidem inveniuntur, exhaustis per unam, aut alteram omnibus quaestionis circumstantiis, indicio id est, reliquas ignotas ad arbitrium posse assumi.

§. V. Plus vero valet in invenienda legitima æquatione ingenium, et exercitium, quam regulæ. Omnes enim, etiam illae, quae a praestantissimis Algebraistis suppeditatae, maxime sunt generales, et minime sufficientes. Audiamus Cartesii regulas. Ille, ni fallor, quatuor inprimis reliquit. Prima est: Nihil esse pro vero assumendum, nisi quod evidenter verum esse cognoscitur. Secunda: Propositam quaestionem in tot partes dividere, quot postulat quaesitae rei investigatio. Tertia: Ordinem servare; nempe ut a facilioribus ad difficiliora ascendamus. Quarta: Ut singulas partes quaestionis attente perlustremus. Videatur in Dissert. de Methodo. Quale de his regulis iudicium ferendum, videre est apud illos, qui omnem lapidem mediantibus illis removere voluerunt. Sunt adhuc fontes propiores qui neutiquam abscondendi. Exempli gratia axiomata, theoremata, quae in subsidium vocanda;

canda ; ut Totum est aeqvale suis partibus simul sumtis : Inter se sunt aeqvalia, quae aeqvalia uni tertio : Propositis tribus continue proportionalibus, factum extremorum est aeqvale facto mediorum : In triangulis rectangulis quadratum hypotenusae est aeqvale quadratis laterum. Et quae alia quamplurima.

§. VI. Distingvi alioquin potest aeqvatio analytica tripliciter. Prima est, cuius utrumque membrum ignota tantum complectitur, ut $x^4 - z = y^3$; et sic ea plane est irresolubilis. Secunda aeqvatio est ea, in qua utrumque membrum nota simul et ignota continet, ut $x^2 - a^1 = z^3 + b^4$. Hic x et z sunt ignota, a vero et b nota. Quae ulterius est resolvable. Tertia est, in qua unum membrum nota tantum, alterum ignota fovet, ut $x^4 = a^1$ in b^2 ; et haec legitima dicitur, seu huius naturae, ut resolvendo tandem possit inveniri quantitas ignota, alicui notae quantitati aeqvalis. Et haec rursus est vel simplex, vel composita; simplex cuius membrum nullo signo $+$ aut $-$ afficitur; sive, in qua quantitas ignota non excedit dignitatem primam, seu non est, quadratum, cubus, aut altioris ordinis, ut simplicis radicis ordinem excedat. Aeqvatio composita est, in qua quantitas ignota est quadratum, cubus aut altioris ordinis. Vbi observandum, quod, si in aeqvatione cernamus quadratum, vel cubum, etc. signo $+$ aut $-$ coniunctum cum sui radice, vocetur aeqvatio quadratica, cubica, etc., affecta vel mulctata latere. Omnium hactenus expositarum specierum formulas

las hic ex Sturmio excerptas habebis.

Aeqvatio simplex $z \equiv b$; vel $y \equiv ab$

Quadratica simplex $yy \equiv ab$; vel $xx \equiv a \overset{c}{a} - bb$

Cubica simplex $z^3 \equiv a \overset{2}{b} c$; vel $y^3 \equiv a^3 \overset{2}{b} b$

Quadratica affecta $x^2 \equiv -ax \div b^2$; vel $y^2 \equiv 2by \div \overset{cd}{2abc}$
d

Cubica affecta $z^3 \equiv az^2 \div b^2 z - c^3$

Quadrato quadratica $y^4 \equiv ay^3 \div b^2 y^2 - c^3 y \div d^4$

§. VII. De reliquo omnem aeqvationem spuriam facile per antithesin possumus ad legitimam reducere. ANTITHESIS contentionem, alias controversiam, atque contradictionem denotat, item oppositionem, et apud Rhetores color quidam est oratorius, atque apud Hermogenem ἀντίθεσις λόγων est disputationum pugna. Hic autem usurpatur, pro contrapositione eorum, quae in alicuius iam explicatae aeqvationis partibus reperiuntur, adeo, ut, quod est in una aeqvationis parte, si ex illa auferatur, ex altera quoque illi aeqvale contrapositum auferatur, aeqvatione non immutata. Idem de additione dicendum. Quamobrem, cum transpositio haec contrapositionem involvat, huiusmodi operatio antithesis appell-

appellatur ; Cum alioquin ex visua tantum ea, quae diximus, significet.

§. VIII. Solet vero ita describi : Antithesis est numeri, seu quantitatis, ex una aequationis parte in alteram partem, sub contraria nota affectionis, transpositio. Vel, est translatio quantitatis ex una parte aequationis ad alteram sub contrario signo. Sic fit pro exemplo $x^2 - a = b^3$. Primum aequationis membrum constat ex nota $-a$, et ignota x^2 quantitate ; alterum autem membrum unicum notum absolvit, scilicet b^3 . Reducatur ad aequationem legitimam, cuius membrum unum nota solum, alterum incognita offert. Tollatur per antithesin $-a$, et remanet x^2 , ac transferatur sub signo contrario, in alteram aequationis partem, et habebimus legitimam aequationem $x^2 = b^3 + a$; Cuius fundamentum unice hoc axioma firmatum : Si aequalibus aequalia addantur, vel demantur, etiam aggregata, sive residua, erunt aequalia. Quod artificium alioquin in his duobus praeceptis exhibetur. Quicquid transponitur, mutat signum ; Homogenea signa negant, heterogenea affirmant. Posterioris sensus est : Si particula transponenda in altera parte similem denominationem habuerit, fit Subtractio minoris a maiore ; Sin vero particula transponenda habuerit in altera parte magnitudinem denominationis eiusdem cum signo opposito, addenda est magnitudo illius particulae huic magnitudini, et relinqvendum idem signum, quod habet magnitudo, cui fit Additio.

§. IX. Absolvitur proinde reductio vel per

G

Addi-

Additionem, vel per Subtractionem. Nec excluditur Multiplicatio, Divisio, et Radicis extractio. Immo ad regulas proportionum frequenter est excurrendum. Quod per varia exempla prae aliis perspicue ostendit Bartholinus in Introduct. ad Cartesii Geometriam.

§. X. Fundamenta reductionis praecipua sunt rursus certa axiomata, inter quae sequentia. Si aequalibus adduntur aequalia, aut demuntur, etiam aggregata, aut residua, erunt aequalia. Et si aequalia multiplicantur, aut dividuntur per idem, etiam facta, et quoti inde oriundi, erunt aequales. Tuto interim observantur regulae sequentes quinque, quae instar praeparationis sunt ad aequationem detegendam. Suppeditat eas Oughtredus in clave Mathematica, c. 16, sequentibus.

Regula Prima.

Si quantitates radicales adsint ex una parte, solae constituentur, et utrinque fiat Multiplicatio secundum exponentis indicationem;

$$d + \sqrt{b} = x$$

$$\sqrt{b} = x - d$$

$$b = xx - 2xd + dd$$

Regula Secunda.

Si ex utraque parte eadem reperiantur quantitates, ad unam transferantur, mediante signo contrario, et addantur. Sic

$$aa +$$

$$\frac{aa \div bc}{\div} = -aa \div xx$$

$$\frac{aa \div aa \div bc}{\div} = xx$$

$$2aa \div bc = xx$$

$$aa \div bc = aa \div xx$$

$$\frac{aa - aa \div bc}{\div} = xx$$

$$bc = xx$$

Regula Tertia.

Si fractiones adsint, termini cuiusvis partes ad eandem denominationem revocantur; deinde vero utraqve pars sub eandem denominationem reducitur, et tandem utrinque denominationes abiiciuntur. v. g.

$$\frac{a \div x}{b} = \frac{d \div f}{g}$$

$$\frac{a \div bx}{b} = \frac{dg \div f}{g}$$

$$\frac{ag \div bxg}{bg} = \frac{bdg \div bf}{bg}$$

$$ag \div bxg = bdg \div bf$$

Regula Qvarta.

Si incognita qvantitas, ad unam partem translata, fuerit multiplicata per cognitam, Divisio fit per cognitam; vel etiam, si utrinque per eandem qvantitatem, five ex meris terminis cognitis, five minus, conflata sit, Divisio fieri possit, illa instituitur ad aeqvationem deprimendam. Vt

$$bgx = bdg + bf - ag$$

$$\underline{x = bdg + bf - ag}$$

$$bg$$

$$ax + bx = cd$$

$$\underline{x = cd}$$

$$a + b$$

Regula Qvinta.

Si appareat, ex utraque parte consistere aliquam potestatem, cuius radix extrahi possit, extractio illa non est intermittenda. Sic

$$aa + 2ax + xx = cc$$

$$\underline{a + x = c}$$

$$x = c - a$$

$$xx = aa$$

$$x = a$$

§. XI. Si itaque ad unam ex superius exhibitis aeqvationibus, vel ad huiusmodi aliquam, quae illis similis est, aeqvatio primum inventa, fuerit reducta, in promptu postea sunt regulae, quibus incognitae qvantitatis valor possit exprimi numeris, vel Geometrice determinari, si quaestio Geometrica, quod effectiorem adpellant. De hac igitur adhuc non-

nonnulla essent dicenda ; verum , quia partim altioris indaginis , quam , ut hic possit explicari , partim quia natura eius , et requisita , commodius , rectiusve in postrema Diff. parte declarantur , B. L. eo usque , ut et ad autores , qui de hac ex instituto quaedam consignavere , ablegamus. Oughtredum puto in appendice Clavis Mathematicae , et in Cl: Math. c. 16 , post edit , et 19 prioris ; in primis autem Harriotum in Algebra , et Fardellam , qui ob perspicuitatem prae aliis commendandus , in usualis Matheseos Theoria ; nec non Sturmium in Math. Enucl. p. 340. Haec proinde de Aeqvatione Speciosa etiam dicta sunt. Limatioris elaborationem suppeditat Ozanam l. 2. de Algebra , ubi 8 capitibus clavem porrigit sacrarium aeqvationis referandi. Agit enim ibi non tantum de aeqvationibus in genere , sed et ostendit modum , quomodo aeqvationes reducendae , et ab asymmetria liberandae ; praeterea quomodo radices earumque potestates indagandae , extrahendae , et termini uniuscuiusque aeqvationis inveniendi : denique indicat usum aeqvationis , et fundamenta Cartesianae Methodi de Resolutione aeqvationum quatuor dimensionum.

PARS III.

Quae docet Analysin rebus ipsis applicare , atque ita eam in succum , et sanguinem convertere.

§. I.

Effe artis analyticae usum plane insignem, innu-
merae testantur erutae veritates, quae hactenus
in profundissimo Democriti puteo absconditae fuere,
quaeque nulla arte alia, aut sapientia humana inde
produci posse videbantur, quam per Algebram. Ast
septa scientiae maxime necessariae non sunt tran-
silienda, h. e. plus iusto ea non est extendenda, ceu
faciunt unus, alterve modernorum, ex nimio, et im-
maturo erga Algebram amore abreptus, nisi nobi-
lissimum donum cum applausu velimus prostituere.

§. II. Saniora itaque sunt cogitata Weigeli,
quae exhibet praefatio ad Philosophiam Mathemati-
cam. Videtur nobis Algebra, inquit, similis fodinae
metallicae, quam si fodiendo fueris persecutus ad in-
timiora terrae viscera, tandem exhausta fere suppe-
ditat eqvidem aliquid metalli nobilissimi, sed parcius
paulo, et maioribus eruendum sumptibus, quam ut
tanto labore videatur lucrum respondere.

§. III. Nec dissentit a nobis illustris Domi-
nus Tschirnhausen in introitu medicinae mentis, et
genuinam Algebrae ostendens sedem, dicit: Quem-
admodum in Mathesi ad ultimum gradum cognitio-
nis perveniendi certa datur scientia, Analysis vide-
licet speciosa vulgo Algebra dicta, et ob praestantiam
suam singularem a recentioribus perquam bene ex-
cultata, quae mihi genuina Philosophia Mathematicum
esse videtur; sic eadem ratione generalis aliqua da-
tur scientia, cuius ope quilibet, ea probe instructus,
non solum, quicquid in Mathesi datur occulti, sed
omne

omne etiam incognitum, sub intellectum cadens, certa, et constanti methodo certe in lucem potens est deducere.

§. IV. Si itaque Algebra ipsa esset genuina Philosophia inveniendi, scientia scientiarum, mater artium, non distinctione, non admonitione praesenti fuisset opus. Aliter vero sibi Vir illustris, cum aliis, eum pone sequentibus, habet persuasum. Ea propter etiam attribuit Algebrae, quae sibi vindicare potest, et insimul e contrario ab ea separat, quae minime gentium sub censum Algebraistarum veniunt.

§. V. Et sic etiam se res omnino habet, si quis, a praeiudicatis opinionibus liber, Algebram, eiusque utilitatem perpendat. Cum enim haec occupata sit in resolvendis unius solum generis quaestionibus, quanta nimirum res sit? Vbi ex notorum, ignotorumque varia compositione, comparatione, etc.: duo aequalia quacunque ratione possunt elici. Plures sane restant veritates, quae hac methodo indagari nequeunt, quam per eam unquam inveniantur. Superfunt enim adhuc quaestiones longe plures, eaeque non minoris momenti, an, quid, cur, qualis, etc. res sit, ad quas se Algebra non extendit. Atque hinc, cum in Physica, moralibus, vita civili, artibus mechanicis, imo haud raro in ipsa Mathesi, praesertim mixta, ad existentiam, naturam et inprimis habitudinem, directionemque ad certum scopum, ac finem, potius quam ad ipsam quantitatem respicimus, rarior ibidem est usus Algebrae. Sic eius ope non invenies

venies Dei existentiam, dabisve causam, cur Luna Eclipsin patiat, aut quid hic, et nunc, posito tali rerum statu, sit agendum. Immo, quod illi, qui in Algebra prorsus dominantur, fateri debent, et fatentur, ultro illud est hoc: Algebram se ipsam non exhaustire. Audiamus acutissimum Leibnizium in epistola, quam dedit ad Dn. Fardellam: Non ita recens analysis, scribit, suis numeris absoluta videtur, ut ulteriori perfectione, et cultura non indigeat; sed ita est imperfecta, et limitata, ut ad singula problemata solvenda non valeat, cum innumerae sunt quaestiones, neque lineares, neque planae, neque solidae, aut alterius gradus, utpote ad transcendentalem (a) Geometriam spectantes, quae Cartesiana analysi solvi nequeant. Sic pariter, quod palmarium caput in Algebraicis, artem ex collatione notorum cum ignotis aequationem eliciendi, primum maxima temporis iactura discere coguntur, et deinceps coacti tandem dicere debent, nondum extare hac de re praeccepta sufficientia, sed usum, ingeniumque hic unice valere.

§. VI. Quid multis. Vfus Algebrae in Mathesi, ceu ex innumeris emendatis, inventis, et solutis methodis, theorematibus, et problematibus constat, magnus est, et singularis, licet et hic limites agno-

(a) De Geometria transcendentali videri possunt Acta Eruditorum sparsim, in primis Mens. Sept. A. 1693. nec non observationes tumultuariae in Cartesii Geometriam, edit. Francof.

agnoscat. In aliis artibus, et scientiis, si methodi analyticae applicationem exceperis, hoc est interprete Dn. Ozanam, ordinem quem Algebra observandum suadet in detegenda veritate, quis, et qualis sit eius usus, et quousque se extendat venit adhuc ostendendum. Si enim cum Hobbesio ad aequationem velis confugere, atque rerum, et proprietatum aequationem, ad imitationem Algebrae, quam illa inter quantitates observat, instituere, vel cum Weigelio attributorum, et essentiarum computationem urgere; vel rem in effectibus ad causas suas adaequatis proportionalibus cum Wallisio quaerere; vereor an assensum invenias. Nescio enim, an ipsimet Statores harum sententiarum, maxime quod ad Weigelium, et Hobbesium attinet, sciant semper, quid dixerint, adeo parce, dicam an obscure, etsi acute, hactenus sunt philosophati. Optimum itaque fuerit, sine ulteriori circuitu utilitatem, quam in Mathematicum inventionem deprehendimus, perpendere, ubi se vel maxime in primis si motus curvilinearis evolutionem attendas exerit. Vid. Dn. D. Heucherus in Diss. prima de Curvis.

§. VII. Vt vero eo rectius eius mysteria usumque in Mathematicis inveniendis percipiamus, necessum erit, sequentem regulam universalem pro analysi observare. Sit itaque

Regula.

Proposita quaestione, praestitum et inventum supponatur, quod postulatur, et, apta adhibita rationatione, literis alphabeti data, et ignota exprimantur,

H

tur,

tur, ut facilius datae quantitates ab incertis dignoscantur: deinde tam data, quam quaesita, secundum conditionem, quaestioni convenientem, ita invicem Additione, Subductione, Multiplicatione, et Divisione mediantibus, comparentur, et ordinentur, ut legitima aequatio confurgat, cuius unum membrum nota, alterum ignota tantum contineat, quae dividendo tandem ita resolvatur, ut quantitatis quaesitae valor innotescat. Videatur Oughthredus in Clav. Mathematica c. 16.; Fardella part. 5. Vfusalis Mathematicae Theoriae.

§. VIII. Lucem iis, quae adhuc in data regula obscura, affundent, quae sequuntur, artificio analytico soluta, et inventa problemata.

PROBLEMA I.

In praelio Salaminiorum contra Macedonas Cassandri Satellites 5 ceperunt praedam 2000 aureorum. Primus inde retulit 658 aureos; reliquam caeteri diviserunt ad proportionem sesqui quintam. Quaeritur, quantum acceperunt singuli?

Respicio hic ante omnia ad quaestionis statum, et perpendo, an quaestio solubilis, nec ne. Video vero, quod solubilis, quia nota habet sufficientia admixta ignotis. Itaque considero circumstantias, quae sequentes sunt: (1) quod ceperint quinque satellites praedam 2000 aureorum; (2) quod primus retulerit 658 aureos; (3) quod reliquum caeteri dividerint

viferint ad proportionem sesqui quintam, et quae
sequuntur. Denominatio proinde erit facilis. Dico
enim

b	accepit	x
c	- - -	$x + \frac{x}{5}$
d	- - -	$x + 2x + \frac{x}{5}$
e	- - -	$x + 3x + \frac{3x}{5} + \frac{x}{25}$

Ergo

$$4x + \frac{6x}{5} + \frac{4x}{25} + \frac{x}{125} = 1342$$

Hoc est, reductis fractionibus ad unam deno-
minationem, scilicet ubique per 5 multiplicando.
Fractio enim quae tunc producitur, aequivalet prio-
ri, ceu ex vulgari Arithmetica constat. Erit
 $671x = 1342$. His peractis reductio est facil-

125
lima. Numerum enim 125 , qui ibi est per divi-
sionem, removeo per multiplicationem, ut $671x =$
evadat 167750 . Denique ut x solum ab altera
parte habeatur, divido 167750 per 671 , et $x =$
erit 250 . Sequenti modo

H 2

$671x =$

$$\begin{array}{r} 671x = \\ \hline 125 \end{array}$$

$$1342$$

$$125$$

$$6710$$

$$2684$$

$$1342$$

$$167750 = 671x.$$

$$30$$

$$4350$$

$$167750 \div 250 = x.$$

$$67111$$

$$677$$

$$6$$

Antea vero b denotabat x. Accepit ergo secundus satellitum 250, qui numerus aequalis x, ergo c 300, d 360, e 432. Vnde ex additis emergit tota summa 1342. Primi enim praemium 658 aureorum ab initio statim erat ablatum. Id si addo, resultant 2000 aurei. Problemati itaque erit satisfactum.

PROBLEMA II.

Quidam emit numerum eqvorum. Si seorsim emisset $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ et insuper 10, haberet eqvos 400, quaeritur eqvorum numerus.

Factis faciendis, ceu regula data iubet, numerus eqvorum quaerendus sit x, cuius $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, faciunt $\frac{13}{12}x$; additis 10, fit $\frac{13}{12}x + 10$, et erit aeqva-

aeqvatio $\frac{13}{12}x + 10 = 400$. Sublatis utrinque 10,

remanet aeqvatio $\frac{13}{12}x = 390$. Divisione institu-

ta uti ulterius requirit regula, fit qvotiens 360, et est numerus qvaesitus, qvem ab initio x dixeramus. Eius dimidium est 180, tertia pars 120, quarta vero 90. Summa omnium 390. Si 10 addantur, fiunt 400. Q. E. F.

PROBLEMA III.

Cum ex qvodam patre familias, qvot oves haberet, qvaereretur, respondet ille; si numerum ovium, qvae mihi nuper furto ablatae sunt, comparo cum illarum, qvas possideo, numero, est ille ut 3 ad 5; praeterea vero si illos numeros in se duco, Productum est 135. Facile ergo colligere poteris, qvot oves habeam.

$$\text{Sit } 3 = a$$

$$5 = b$$

$$135 = c$$

Numerus furto ablatarum $= x$, erit numerus ovium de qvibus qvaeritur $= \frac{bx}{a}$ Nam ut

$$a. b :: x. \frac{bx}{a}$$

$$\text{Quia vero productum } x \cdot \frac{bx}{a}$$

H 3

est

est aequale numero dato c,

$$\begin{array}{rcl} \text{ergo} & bxx & = ca \\ & \underline{a} & \underline{a} \\ & bxx & = ac \\ & \underline{xx} & = \underline{ac} \\ & & \underline{b} \\ & x & = \sqrt{ac} \end{array}$$

ergo in hoc exemplo, quia

$$\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ c & = & 135 \\ \hline ac & = & 405 \text{ f} \\ b & = & 55 \text{ l } 81 \end{array}$$

ergo $\underline{81} = \underline{ac}$, cuius radix est $9 = \sqrt{ac}$. Oves

itaque ablatae fuerunt novem ; et quia ut 3 ad 5,
ita numerus ablatarum ad quaesitum, erit numerus
ovium, de quibus quaestio fuit instituta = 15.

PROBLEMA IV.

In exercitu Caesareo ex Germanis, Hungaris, et Italis conflato, sunt Germani 25000 ; Hungari

gari $\frac{1}{2}$ Germanorum atque Italarum ; Itali denique

faciunt $\frac{1}{8}$ Germanorum atque Hungarorum. Quae-

ritur numerus Hungarorum et Italarum, et quantum sit totus exercitus.

Sint 25000 = a, 2 = b, 8 = c, Hungari = x, Itali = y. Quia Hungarorum numerus est dimidius Germanorum, atque Italarum, simul sum-

ptorum, erit $\frac{x = a + y}{b}$; et quia Italarum nume-

rus aequat octavam partem Germanorum, et Hungarorum, erit $\frac{y = a + x}{c}$, ita ut iam tot sint in-

ventae aequationes, quot quantitates incognitae suppositae fuerunt. Harum vero reductio ut rite instituat, reducatur ultima aequatio ita, ut ex una parte solum x consistat. Sic $y = \frac{a + x}{c}$, yc

$= a + x$, $yc = a + x$, $yc - a = x$. Quia ergo $\frac{a + y}{b}$

$= x$, et $yc - a$ est quoque eidem x aequale. Ergo quae uni tertio sunt aequalia, inter se sunt aequalia, atque $\frac{a + y}{b} = yc - a$, $a + y = b(yc - a)$,

b

a + y

$$a + y + ab = byc, a + ab = byc - y, \frac{a + ab}{bc - 1} = y,$$

hoc est in casu praesenti :

$$\begin{array}{rcl} a = 25000, & b = 2 & \\ b = 2 & c = 8 & 2 \\ \hline ab = 50000 & bc = 16 & 75000 \\ a = 25000 & 1 & 15555 \\ \hline a + ab = 75000. & bc - 1 = 15 & \left. \begin{array}{l} 5000 = \\ \frac{a + ab}{bc - 1} = y \end{array} \right\} \end{array}$$

Fuit ergo numerus Italarum = 5000, quo invento habetur etiam numerus Hungarorum = $x = \frac{a + y}{b}$.

Nam

$$\begin{array}{rcl} a & = & 25000 \\ y & = & 5000 \\ \hline a + y & = & 30000 \end{array}$$

$$\frac{a + y}{b} = \frac{30000}{22} \left\{ \begin{array}{l} 15000 = x. \end{array} \right.$$

Numerus ergo exercitus est 25000 Germanorum, 15000 Hungarorum, 5000 Italarum, qui omnes = 45000. Q. E. I.

PRO-

PROBLEMA V.

Prope Bargiliam Cariae maritimum oppidum, locus erat, ubi extraverso litoris cernebantur novem columnae marmoreae, quarum singularum interstitium a proxima quaque tribus ac triente stadiis separabatur: Omnium autem a littore distantiae aggregatae efficiebant 231 stadia. Quenam erant intervalla singularum.

Hic consideratis omnibus circumstantiis video confestim, quod non tantum solubile, sed etiam, quod, si distantia primae saltem columnae a littore sit nota, reliquae quoque notae fuerint. Voco itaque primam x , secundam $x + 3\frac{1}{3}$, tertiam $x + 6\frac{2}{3}$, quartam $x + 10$, quintam $x + 13\frac{1}{3}$, sextam $x + 16\frac{2}{3}$, septimam $x + 20$, octavam $x + 23\frac{1}{3}$, nonam $x + 26\frac{2}{3}$, omnes, $9x + 120$. Ergo videtur $9x + 120 = 231$. Reduco itaque hanc aequationem, ita, ut ex una parte sola habeam cognita, ex altera incognita.

$$\begin{array}{r} 9x + 120 = 231 \\ \quad \quad 120 \\ \hline 9x = 111 \end{array}$$

Iuxta regulam nostram datam divido 111 per 9, productum erit $12\frac{1}{3} = x$, distantia vera primae columnae, qua distantia nota, reliquae reliquarum ignotae esse nequeunt.

Si enim	1	distat	$12\frac{1}{3}$	stadia, perspicuum erit, quod
	2	-	$15\frac{2}{3}$	distancia
	3	-	19	
	4	-	$22\frac{1}{3}$	
	5	-	$25\frac{2}{3}$	
	6	-	29	
	7	-	$32\frac{1}{3}$	
	8	-	$35\frac{2}{3}$	
	9	-	39	

Omnium 231, quae Summa data distantiarum. Habemus itaque intervalla singularum, Q. E. Q.

PROBLEMA VI.

Adolescens aliquis ingreditur hortum per tres portas ordine sibi succedentes, poma decerpturus; Reversus reddidit ianitori dimidiam pomorum partem, qui deinceps illi restituit, poma 12: ita et secundo ianitori dat dimidium pomorum, restituit tamen hic ipsi 10: Tertio rursus offert reliquorum dimidium, ac recepit ab ipso 4. Domum autem reversus comperit, relictum sibi dimidium pomorum omnium, quae in horto legerat: Quaeritur quot poma legerit ab initio?

Dico primo decerpfit x ; habuit itaque post egressum primum $\frac{1}{2}x + 12$, post secundum $\frac{1}{4}x + 16$, post tertium $\frac{1}{8}x + 12$. Domum autem reversus competit, relictum sibi dimidium pomorum omnium, quae

quae in horto legerat. Ergo $\frac{1}{8} \times 12 = \frac{1}{2} \times$ five $\frac{4}{8}$.
 Subtracto $\frac{1}{8} \times a \frac{4}{8}$, remanet $12 = \frac{3}{8}x$. Multiplica-
 tis 12 per 8, erit $96 = 3x$. Divisis 96 postmodum
 per 3, $x =$ evadet 32, qui est numerus pomo-
 rum quem habuit ab initio. Id quod omnes etiam
 circumstantiae svadent: Si enim post primum egres-
 sum dedit ianitori dimidium, ianitor vero 12 restituit,
 retinuit 28. Si secundo ianitori rursus dimidium
 obtulit, habuit 24, postquam a ianitore 10 reddita
 fuerunt. Huius dimidium accepit tertius; super
 sunt itaque 16 si donum ianitoris dimidio pomo-
 rum retento addas, dimidium pomorum, quae in
 horto legerat. Q. E. I.

Inventio prop. II. 2. Elementorum.

Datam rectam B, sic secare, ut rectangulum
 sub tota B et minore segmento, aequetur quadra-
 to maioris segmenti. Sive in extrema et media ra-
 tione secare.

Sit maius segmentum a, erit minus $b - a$. Du-
 catur $b - a$ in b , fiet $bb - ba = aa$, vel $aa + ba = bb$.

Quare radix universalis $bb + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}b = a$.

Quod theorema sic potest effari. Si quadrato datae
 lineae, addatur quadrati ipsius quadrans, et e late-
 re quadrato summae, tollatur semis lineae datae: re-
 liquum erit segmentum maius.

Geometrice autem construatur, si fiat $AB = b$,
 eiqve ad angulos rectos statuatur $BC = \frac{1}{2}b$. Et
 ducatur hypotenusa $AC = \sqrt{u:bb + \frac{1}{4}bb}$. Ab
 scindatur $CD = BC$. Eritqve residuum AD
 $= \sqrt{u:bb + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b$. Deniqve mensuretur AE
 $= AD$, pro maiore segmento.

§. IX. Plura ut addam, praesens institu-
 tum non permittit. Adeat interea, qui potest Schoo-
 tenii tractatum elegantissimum de concinnandis de-
 monstrationibus ex calculo Algebraico; ibi omni id
 inveniet, quod hic desiderari potest. Quippe ex in-
 stituto, ceu istius frater, Petrus a Schooten, in dedi-
 catione operis monet, libellum omnimoda erudi-
 tione refertum eum in finem conscripsit. Si quis
 vero et alios autores, qui eandem partem, vel ea,
 de quibus haecenus disseruimus, pertractarunt, velit
 consulere, tempus non inutiliter triverit, si haud
 gravatus sequentes evolvere voluerit. Nimirum
 Diophanti Alexandrini libr. 6. Arith. Tholos. 1670.
 fol. Petri de Fermat Observat. in Dioph. Parisiis,
 1675. in fol. Gilberti Clerck. Oughthredum expli-
 catum. Lond. 1682. 8. Oughthredum ipsum in Cla-
 ve Mathem. Oxon. 1654. 4. Clavii Algebram in 4.
 Romae 1608. Claudii Francisci Milliet de Chales
 cursum

cursum Mathematicum. Lugd. 1674. fol. Cardanum de Regulis Algebraicis, Lugd. 1663, fol. Iacobi Billi Doctrinae Analyticae Inventum novum. Tholos. 1671, fol. Petri Mengoli Geometriae Speciosae Elementa, Bon. 1659, 4. Eiusdem Viam Regiam per Algebram ad Mathesin, ibid. Laurembergii Institutiones Arithmeticae. Lipsiae 1667, 4. Thomae Backeri Clavem Geometricam. Lond. 1684, 4. Gerhardi Kinchuyfen Algebram 4. Harlem. 1662. Ioh. Rhani Introductionem Algebrae, Germanice editam, 1659. Petri Rhodensis Arithmetica Philosophicam, five Algebram, German. 4. Norimbergae, 1608. Nicolai Tartaglia Algebram. fol. Venet. 1556. Gosselii Compend. Algebrae Tart. Paris. 1603, 8. Item Horchs Algebram, ac Faulhaberi Ioh. Lat. et German. 4. cum Eiusdem Academia Algebraica, August. Vindel. 1631. Leuneshlosium, Craigium, Slusium, Hugenum, Catelani Constructionem Aequationum, Elementa Algebrae, quae vulgo Malebranchio adscribuntur, Hirium de Constructione Aequationum, L'amy Tract. de Algebra, et Analyfi, Gottignies in Logistica; item novissimum Dn. Ozanam in Nouveaux Elemens d'Algebre a Amster. 1702. 8, et traité des lignes du premier genre. Haec sunt, quae hac vice in medium pro ferre placuit, et pro instituti ratione licuit. Caeterum obsequio praesentem dissertationem, ceu veteres convivia variis apophoretorum generibus, verissimo asserto Ovidii, omnia iam fient fieri quae posse negabam;

Sol est invisibilis, videtur tamen ante ortum et post occasum.

Luna illuminat terram, et tamen lumen habet a terra.

Sebastianus a Cano omnibus, eodem momento cum ipso natis, aetate est minor.

Si duo ad idem tempus ex aliquo loco telluris proficiscantur, unus versus ortum, alter versus occasum, atque tota tellure circumnavigata redierint simul ad locum illum, ille qui versus ortum iter instituit, duos dies amplius numerabit quam ille, qui versus occasum est profectus.

Si in Macao est dies solis, in Philippinis est dies Saturni.

Vmbra adhuc hodie in Sciaterio retrogreditur.

QVID SI SIC.



Feuerlein, Johann Georg Christoph,

De algebra

Vitemberga [1703]

4 Diss. 3688,15

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10971635-5

VD18 14953609-001